20

by Fitri Aryani

Submission date: 24-Nov-2018 11:56AM (UTC+0800)
Submission ID: 1043954883
File name: PAPER_SEMIRATA_MEDAN_2018.pdf (651.65K)
Word count: 2361
Character count: 11415

TRACE MATRIKS BERBENTUK KHUSUS 2 X 2 BERPANGKAT BILANGAN BULAT POSIIF
(*TRACE OF POSITIVE INTEGER POWER OF* 2 X *2 MATRICES SPECIAL*)

Fitri Aryani dan Titik Fatonah
Jurusan Matematika, Fakultas Sains dan Teknologi, UIN Sultan Syarif Kasim Riau
Jl. HR. Soebrantas No. 155 Simpang Baru, Panam, Pekanbaru, 28293
Email: khodijah_fitri@uin-suska.ac.id

Abstrak

Trace matriks adalah jumlah elemen-elemen diagonal utama dari matriks bujur sangkar. Makalah ini membahas *trace* dari matriks yang berbentuk khusus 2x2 berpangkat bilangan bulat positif. Terdapat dua langkah dalam pembentukan bentuk umum *trace* matriks tersebut. Pertama, menentukan bentuk umum matriks berpangkat (A^n) dari matriks khusus 2x2 tersebut, dan membuktikan bentuk umum (A^n) menggunakan induksi matemaika. Kedua, menentukan bentuk umum $tr\,(A^n)$ dan membuktikannya dengan pembuktian langsung. Diperoleh hasil bentuk umum *trace* matriks yang berbentuk khusus 2x2 berpangkat bilangan bulat positif dengan entri bilangan riil.

Katakunci: *determinan, induksi matematika, pemangkatan matriks, trace*

Abstract

Trace matrix is the sum of the main diagonal elements of the square matrix. This Paper discusses the trace of positive integer power of real 2x2 special matrices. There are two steps in forming the general shape of the trace matrix. First, determine the general form of (A^n) from real 2x2 special matrices and prove it using mathematical induction. Second, determine the general form trace (A^n) and prove it by direct proof. The results obtained a general shape of trace of positive integer power power of real 2x2 special matrices for n odd and n even.

Keywords: determinant, mathematical induction, power of matrix, trace

PENDAHULUAN

Trace matriks adalah jumlah dari elemen-elemen diagonal utama dari matriks bujur sangkar, yang didefinisikan sebagai berikut

$$Tr(A) = a_{11} + a_{22} + \cdots + a_{nn} = \sum_{i=1}^{n} a_{ii} \,.$$

Menghitung *trace* dari suatu matriks tidaklah begitu susah, namun apabila matriks tersebut adalah matriks yang berpangkat , maka untuk menghitung *trace*nya harus dipangkatkan terlebih dahulu sebanyak n. Sehingga untuk menghitung *trace* matriks berpangkat cukup rumit. Artinya, hal ini cukup menarik untuk diteliti bagaimana menemukan formula untuk menghitung *trace* matriks berpangkat tanpa menghitung perpangkatan matriks.

Penghitungan *trace* matriks berpangkat telah banyak menjadi perhatian. Datta et.al (1976), telah mendapatkan algoritma penghitungan *trace* matriks berpangkat $Tr\ (A^k)$, dengan k adalah bilangan bulat dan A adalah matriks Hassenberg dengan unit *codiagonal*. Chu. Mt (1985) membahas mengenai kalkulasi simbolik pada *trace* matriks tridiagonal yang berpangkat. Pembahasan *trace* juga terdapat pada beberapa aplikasi dalam teori matriks dan aljabar linier numerik. Sebagai contoh didalam penentuan nilai eigen suatu matriks simetris, prosedur dasar dalam mengestimasi *trace* (A^n) dan (A^{-n}) dengan n adalah bilangan bulat (Pan. V, 1990). Menurut Zarelua (2008) pada teori bilangan dan kombinatorik, *trace* matriks berpangkat bilangan bulat berhubungan dengan kekongruenan Euler, yaitu:

$$Tr\left(A^{p^r}\right) = Tr\left(A^{p^{r-1}}\right) \ \ mod\ (p^r)$$

untuk semua matriks A bilangan bulat, p adalah bilangan prima dan r bilangan bulat. Makalah tersebut juga membahas mengenai invarian pada sistem dinamik yang digambarkan sebagai bentuk *trace* matriks berpangkat bilangan bulat. Contoh yang diberikan pada makalah tersebut adalah bilangan Lefschetz. Pada bidang analisis jaringan tepatnya pada *triangle counting in a graph*, menurut Avron (2010) ketika menganalisa suatu jaringan yang kompleks, masalah terpenting yaitu menghitung bilangan total segitiga pada graph sederhana terhubung. Bilangan tersebut sama dengan $Tr(A^3)/6$, dengan A adalah matriks ketetanggaan pada graph.

Pembahasan mengenai *trace* matriks berpangkat juga telah dibahas oleh Pahade dan Jha (2015) dalam makalahnya "*Trace of positive integer power of real matrices*". Makalah tersebut mendapatkan bentuk umum *trace* matriks orde $2x2$ berpangkat bilangan bulat positif. Dalam makalah tersebut terdapat dua bentuk umum *trace* matriks berpangkat. Pertama, bentuk umum *trace* matriks berpangkat untuk n genap, yaitu:

$$tr(A^n) = \sum_{r=0}^{n/2} \frac{(-1)^r}{r!} n[n-(r+1)][n-(r+2)]\cdots[n-(r+(r-1))](\det(A))^r (tr(A))^{n-2r} \quad (1)$$

Kedua, bentuk umum *trace* matriks berpangkat untuk n ganjil, yaitu:

$$tr(A^n) = \sum_{r=0}^{n-1/2} \frac{(-1)^r}{r!} n[n-(r+1)][n-(r+2)]\cdots[n-(r+(r-1))](\det(A))^r (tr(A))^{n-2r} \quad (2)$$

Aryani dan Solihin (2017) membahas mengenai *trace* matriks orde 2x2 berpangkat bilangan bulat negatif. Dalam makalah tersebut terdapat dua bentuk umum *trace* matriks berpangkat. Pertama, bentuk umum *trace* matriks berpangkat untuk n genap, yaitu:

$$tr(A^{-n}) = \frac{\sum_{r=0}^{n/2} \frac{(-1)^r}{r!} n[n-(r+1)][n-(r+2)]\cdots[n-(r+(r-1))](\det(A))^r (tr(A))^{n-2r}}{(\det(A))^n} \quad (3)$$

Kedua, bentuk umum *trace* matriks berpangkat untuk n ganjil, yaitu:

$$tr(A^{-n}) = \frac{\sum_{r=0}^{n-1/2} \frac{(-1)^r}{r!} n[n-(r+1)][n-(r+2)]\cdots[n-(r+(r-1))](\det(A))^r (tr(A))^{n-2r}}{(\det(A))^n} \quad (4)$$

Berdasarkan latar belakang tersebut maka makalah ini membahas mengenai *trace* matriks berbentuk khusus berpangkat bilangan bulat positif, dengan bentuk matriksnya adalah:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & a \\ b & 0 \end{bmatrix}, \forall\, a, b \in \mathbb{R} \quad (5)$$

Tujuan penelitian ini adalah mendapatkan bentuk umum $tr\ (A^n)$ dengan A adalah matriks khusus seperti Persamaan (5). Diharapkan dengan bentuk umum tersebut tidak perlu lagi proses yang panjang untuk menentukan $tr\ (A^n)$, cukup dengan mensubstitusi entri – entri matriks kedalam bentuk umum $tr\ (A^n)$ tersebut.

BAHAN DAN METODE

Berikut diberikan bahan-bahan yang diperlukan dalam pembahasan selanjutnya.

Definisi 1 (Anton, 1987) Jika A adalah sebuah matriks bujur sangkar, maka dapat didefinisikan pangkat-pangkat bilangan bulat taknegatif A menjadi

$$A^0 = I, \qquad A^n = \underbrace{AA \ldots A}_{n\ faktor}\ (n > 0).$$

Akan tetapi, jika A dapat dibalik, maka dapat didefinisikan pangkat bilangan bulat negatif menjadi

$$A^{-n} = (A^{-1})^n = \underbrace{A^{-1}A^{-1} \ldots A^{-1}}_{n\ faktor}.$$

Teorema berikut merupakan sifat-sifat yang berhubungan dengan Definisi 1.

Teorema 1 (Anton, 1987) Jika A adalah matriks kuadrat dan r serta s adalah bilangan bulat, maka berlaku:

i. $A^r A^s = A^{r+s}$.

ii. $(A^r)^s = A^{rs}$.

Teorema berikut menjelaskan sifat-sifat *trace* matriks dari matriks bujur sangkar.

Teorema 2 (Gentle, 2007) Jika A dan B adalah matriks bujur sangkar dengan orde yang sama dan c adalah skalar,maka berlaku:

i. $tr(A) \quad = tr(A^T)$.

ii. $tr(cA) \quad = c\, tr(A)$.

iii. $tr(A + B) \quad = tr(A) + tr(B)$.

iv. $tr(AB) \quad = tr(BA)$.

Pembuktian bentuk umum *trace* matriks berpangkat bilangan bulat positif pada pembahasan, menggunakan induksi matematika. Menurut Munir (2012) prinsip induksi sederhana berbunyi sebagai berikut : misalkan $p(n)$ adalah proposisi perihal bilangan bulat positif dan kita ingin membuktikan bahwa $p(n)$

benar untuk semua bilangan bulat positif n. Untuk membuktikan proposisi ini, hanya perlu menunjukkan bahwa:

1. $p(1)$ benar, dan
2. Jika $p(n)$ benar, maka $p(n+1)$ juga benar untuk setiap $n \geq 1$.

Sehingga $p(n)$ benar untuk semua bilangan bulat positif n.Langkah 1 dinamakan basis induksi, sedangkan langkah 2 dinamakan langkah induksi. Langkah induksi asumsi berisi asumsi (andaian) yang menyatakan bahwa $p(n)$ benar. Asumsi tersebut dinamakan hipotesis induksi. Bila sudah ditunjukkan kedua langkah tersebut benar maka terbukti bahwa $p(n)$ benar untuk semua bilangan bulat positif n.

Metodologi penelitian yang digunakan pada makalah ini adalah tinjauan pustaka. Ada beberapa langkah secara umum yang akan dilakukan untuk mendapatkan bentuk umum *trace* matriks khusus 2 x 2 berpangkat bilanagn positif. Pertama, menentukan bentuk umum A^n dengan dugaan yang dilakukan dari A^2 sampai dengan A^{12}. Serta membuktikannya dengan menggunakan induksi matematika. Kedua, menentukan $tr(A^n)$ dari bentuk umum A^n, dan membuktikan dengan pembuktian langsung.

HASIL DAN PEMBAHASAN

Berdasarkan metodologi penelitian, maka pada bagian ini dibagi dua. Bagian pertama adalah bentuk umum perpangkatan matriks dan bagian keda adalah bentuk umum *trace* dari matriks berpangkat.

1. Bentuk Umum Perpangkatan Matriks

Berikut dipaparkan proses mendapatkan bentuk umum matriks berpangkat (A^n) . Apabila $A = \begin{bmatrix} 0 & a \\ b & 0 \end{bmatrix}, \forall\, a, b \in \mathbb{R}$, maka dengan aturan perpangkatan matriks yang sesuai dengan Definisi 1, maka diperoleh :

$A^2 = \begin{bmatrix} ab & 0 \\ 0 & ab \end{bmatrix}$ $\quad$ $A^3 = \begin{bmatrix} 0 & a^2b \\ ab^2 & 0 \end{bmatrix}$

$A^4 = \begin{bmatrix} a^2b^2 & 0 \\ 0 & a^2b^2 \end{bmatrix}$ $\quad$ $A^5 = \begin{bmatrix} 0 & a^3b^2 \\ a^2b^3 & 0 \end{bmatrix}$

$$A^6 = \begin{bmatrix} a^3b^3 & 0 \\ 0 & a^3b^3 \end{bmatrix} \qquad A^7 = \begin{bmatrix} 0 & a^4b^3 \\ a^3b^4 & 0 \end{bmatrix}$$

$$A^8 = \begin{bmatrix} a^4b^4 & 0 \\ 0 & a^4b^4 \end{bmatrix} \qquad A^9 = \begin{bmatrix} 0 & a^5b^4 \\ a^4b^5 & 0 \end{bmatrix}$$

$$A^{10} = \begin{bmatrix} a^5b^5 & 0 \\ 0 & a^5b^5 \end{bmatrix} \qquad A^{11} = \begin{bmatrix} 0 & a^6b^5 \\ a^5b^6 & 0 \end{bmatrix}$$

$$A^{12} = \begin{bmatrix} a^6b^6 & 0 \\ 0 & a^6b^6 \end{bmatrix} \qquad A^{13} = \begin{bmatrix} 0 & a^7b^6 \\ a^6b^7 & 0 \end{bmatrix}$$

Apabila diperhatikan hasil yang diperoleh, maka bentuk umum matriks berpangkat ada dalam dua bentuk. Bentuk umum matriks berpangkat tersebut disajikan dalam Teorema 3 berikut.

Teorema 3: Diberikan matriks dengan bentuk $A = \begin{bmatrix} 0 & a \\ b & 0 \end{bmatrix}, \forall\, a, b \in \mathbb{R}$, maka

$$A^n = \begin{cases} \begin{bmatrix} 0 & a^{\frac{n+1}{2}} b^{\frac{n-1}{2}} \\ a^{\frac{n-1}{2}} b^{\frac{n+1}{2}} & 0 \end{bmatrix} & \text{, untuk } n \text{ ganjil} \\ \begin{bmatrix} a^{\frac{n}{2}} b^{\frac{n}{2}} & 0 \\ 0 & a^{\frac{n}{2}} b^{\frac{n}{2}} \end{bmatrix} & \text{, untuk } n \text{ genap} \end{cases}$$

Bukti: Pembuktian menggunakan induksi matematika sebagai berikut:

Misal $p(n)$: $A^n = \begin{bmatrix} 0 & a^{\frac{n+1}{2}} b^{\frac{n-1}{2}} \\ a^{\frac{n-1}{2}} b^{\frac{n+1}{2}} & 0 \end{bmatrix}$, dengan n ganjil dibuktikan sebagai berikut:

1) Untuk $n = 1$ maka

   $p(1)$: $A^1 = \begin{bmatrix} 0 & a^1b^0 \\ a^0b^1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & a \\ b & 0 \end{bmatrix}$, dengan memperhatikan bentuk matriks A

   maka $p(1)$ benar,

2) Asumsikan untuk $n = k$, maka $p(k)$ benar, yaitu:

   $p(k)$: $A^k = \begin{bmatrix} 0 & a^{\frac{k+1}{2}} b^{\frac{k-1}{2}} \\ a^{\frac{k-1}{2}} b^{\frac{k+1}{2}} & 0 \end{bmatrix}$, dengan k ganjil.

maka akan dibuktikan untuk $n = k + 2$, maka $p(k + 2)$ juga benar, yaitu:

$$p(k+2): A^{k+2} = \begin{bmatrix} 0 & a^{\frac{k+3}{2}} b^{\frac{k+1}{2}} \\ a^{\frac{k+1}{2}} b^{\frac{k+3}{2}} & 0 \end{bmatrix}$$

Pembuktian dimulai dari

$$A^{k+2} = A^k A^2$$

$$= \begin{bmatrix} 0 & a^{\frac{k+1}{2}} b^{\frac{k-1}{2}} \\ a^{\frac{k-1}{2}} b^{\frac{k+1}{2}} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} ab & 0 \\ 0 & ab \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 0 & a^{\frac{k+1}{2}} b^{\frac{k-1}{2}} (ab) \\ a^{\frac{k-1}{2}} b^{\frac{k+1}{2}} (ab) & 0 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 0 & a^{\frac{k+3}{2}} b^{\frac{k+1}{2}} \\ a^{\frac{k+1}{2}} b^{\frac{k+3}{2}} & 0 \end{bmatrix}$$

Oleh karena Langkah (1) dan (2) sudah diperlihatkan benar, maka terbukti

$A^n = \begin{bmatrix} 0 & a^{\frac{n+1}{2}} b^{\frac{n-1}{2}} \\ a^{\frac{n-1}{2}} b^{\frac{n+1}{2}} & 0 \end{bmatrix}$, dengan n ganjil. Selanjutnya akan dibuktikan untuk n genap. Misal $p(n)$: $A^n = \begin{bmatrix} a^{\frac{n}{2}} b^{\frac{n}{2}} & 0 \\ 0 & a^{\frac{n}{2}} b^{\frac{n}{2}} \end{bmatrix}$, dengan n genap, dibuktikan sebagai berikut:

1) Untuk $n = 2$, maka

   $p(2)$: $A^2 = \begin{bmatrix} a^1 b^1 & 0 \\ 0 & a^1 b^1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ab & 0 \\ 0 & ab \end{bmatrix}$, dengan memperhatikan bentuk perpangkatan matriks untuk A^2, maka $p(2)$, benar.

2) Asumsikan untuk $n = k$, maka $p(k)$ benar, yaitu:

   $p(k)$: $A^k = \begin{bmatrix} a^{\frac{k}{2}} b^{\frac{k}{2}} & 0 \\ 0 & a^{\frac{k}{2}} b^{\frac{k}{2}} \end{bmatrix}$, dengan k genap.

maka akan dibuktikan untuk $n = k + 2$, maka $p(k + 2)$ juga benar, yaitu:

$$p(k+2): A^{k+2} = \begin{bmatrix} a^{\frac{k+2}{2}} b^{\frac{k+2}{2}} & 0 \\ 0 & a^{\frac{k+2}{2}} b^{\frac{k+2}{2}} \end{bmatrix}$$

Pembuktian dimulai dari

$$A^{k+2} = A^k A^2$$

$$= \begin{bmatrix} a^{\frac{k}{2}}b^{\frac{k}{2}} & 0 \\ 0 & a^{\frac{k}{2}}b^{\frac{k}{2}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} ab & 0 \\ 0 & ab \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} a^{\frac{k}{2}}b^{\frac{k}{2}}(ab) & 0 \\ 0 & a^{\frac{k}{2}}b^{\frac{k}{2}}(ab) \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} a^{\frac{k+2}{2}}b^{\frac{k+2}{2}} & 0 \\ 0 & a^{\frac{k+2}{2}}b^{\frac{k+2}{2}} \end{bmatrix}$$

Oleh karena Langkah (1) dan (2) sudah diperlihatkan benar, maka terbukti

$A^n = \begin{bmatrix} a^{\frac{n}{2}}b^{\frac{n}{2}} & 0 \\ 0 & a^{\frac{n}{2}}b^{\frac{n}{2}} \end{bmatrix}$ untuk n genap. Berdasarkan pembuktian tersebut, maka Teorema 3 terbukti. ■

2. Trace Matriks Khusus Berpangkat Bulat Positif

Setelah didapat bentuk umum matriks berpangkat yang dipaparkaan dari Teorema 3, maka akan dijelaskan bentuk umum $tr\,(A^n)$. Berdasarkan bentuk perpangkatan matriks sebelumnya, maka diperoleh nilai *trace*nya, yaitu:

$tr(A) = 0,$ $tr\,(A^2) = 2\,ab$

$tr\,(A^3) = 0,$ $tr\,(A^4) = 2\,a^2b^2 = 2\,(ab)^2$

$tr\,(A^5) = 0,$ $tr\,(A^6) = 2\,a^3b^3 = 2\,(ab)^3$

$tr\,(A^7) = 0,$ $tr\,(A^8) = 2\,a^4b^4 = 2\,(ab)^4$

$tr\,(A^9) = 0,$ $tr\,(A^{10}) = 2\,a^5b^5 = 2\,(ab)^5$

$tr\,(A^{11}) = 0,$ $tr\,(A^{12}) = 2\,a^6b^6 = 2\,(ab)^6$

$tr\,(A^{13}) = 0$.

Apabila diperhatikan hasil yang diperoleh, maka bentuk umum *trace* matriks berpangkat ada dalam dua bentuk. Bentuk umum *trace* matriks berpangkat tersebut disajikan dalam Teorema 4 berikut.

Teorema 4: Diberikanmatriksdenganbentuk $A = \begin{bmatrix} 0 & a \\ b & 0 \end{bmatrix}, \forall\, a, b \in \mathbb{R}$, maka

$$tr(A^n) = \begin{cases} 0 & \text{, untuk } n \text{ ganjil} \\ 2(ab)^{\frac{n}{2}} & \text{, untuk } n \text{ genap} \end{cases}$$

Bukti: Pembuktian Teorema 4 menggunakan pembuktian langsung.

Akan dibuktikan $tr\ (A^n)$, dengan n ganjil sebagai berikut:

Berdasarkan Teorema 3 maka didapat bentuk umum $tr\ (A^n)$, untuk n ganjil yaitu:

$$tr(A^n) = tr\left(\begin{bmatrix} 0 & a^{\frac{n+1}{2}} b^{\frac{n-1}{2}} \\ a^{\frac{n-1}{2}} b^{\frac{n+1}{2}} & 0 \end{bmatrix}\right)$$

$= 0 + 0 = 0$. Maka terbukti $tr\ (A^n) = 0$, untuk n ganjil.

Selanjutnya akan dibuktikan $tr(A^n) = 2(ab)^{\frac{n}{2}}$, untuk n genap sebagai berikut:

Berdasarkan Teorema 3 maka didapat bentuk umum $tr(A^n)$ untuk n genap yaitu:

$$\begin{aligned} tr(A^n) &= tr\left(\begin{bmatrix} a^{\frac{n}{2}} b^{\frac{n}{2}} & 0 \\ 0 & a^{\frac{n}{2}} b^{\frac{n}{2}} \end{bmatrix}\right) \\ &= a^{\frac{n}{2}} b^{\frac{n}{2}} + a^{\frac{n}{2}} b^{\frac{n}{2}} \\ &= 2a^{\frac{n}{2}} b^{\frac{n}{2}} = 2\ (ab)^{\frac{n}{2}} \end{aligned}$$

Maka terbukti $tr\ (A^n) = 2(ab)^{\frac{n}{2}}$, untuk n genap. Berdasarkan pembuktian tersebut, maka Teorema 4 terbukti. ■

KESIMPULAN

Berikut diberikan kesimpulan berdasarkan hasil dan pembahasan. Apabila diberikan matriks $A = \begin{bmatrix} 0 & a \\ b & 0 \end{bmatrix}, \forall\ a, b\ \in\ \mathbb{R}$, maka diperoleh:

1. Bentuk umum matriks berpangkat bilangan bulat positif adalah:

$$A^n = \begin{cases} \begin{bmatrix} 0 & a^{\frac{n+1}{2}} b^{\frac{n-1}{2}} \\ a^{\frac{n-1}{2}} b^{\frac{n+1}{2}} & 0 \end{bmatrix} & \text{, untuk } n \text{ ganjil} \\ \begin{bmatrix} a^{\frac{n}{2}} b^{\frac{n}{2}} & 0 \\ 0 & a^{\frac{n}{2}} b^{\frac{n}{2}} \end{bmatrix} & \text{, untuk } n \text{ genap} \end{cases}$$

2. Bentuk umum $tr(A^n)$ adalah:

$$tr(A^n) = \begin{cases} 0 & \text{, untuk } n \text{ ganjil} \\ 2(ab)^{\frac{n}{2}} & \text{, untuk } n \text{ genap} \end{cases}$$

UCAPAN TERIMAKASIH

Terimakasih kepada dosen-dosen di jurusan matematika fakultas sains dan teknologi UIN Suska Riau, atas saran dan sumbangsihnya sehingga penelitian ini selesai.

DAFTAR PUSTAKA

Anton, H 1987. Aljabar Linier Elementer. Edisi kelima. Penerbit Erlangga, Jakarta.

Aryani, F, and Solihin, M. 2017. Trace Matriks Real Berpangkat Bilangan Bulat Negatif, Jurnal Sains Matematika dan Statistika,

Avron, H. 2010. Counting Triangles in Large Graphs Using Randomized Matrix Trace Estimation, *Proceedings of KDD-LDMTA'10*, ACM.

Brezinski, C., Fika, P., and M. Mitrouli. 2012 Estimations Of The Trace Of Powers Of Positive By Extrapolation Of The Moment, *Electronic Transactions on Numerical Analysis*, 39, 144-155.

Chu, M.T, and Raleigh. 1985. Symbolic Calculation of the Trace of the Power of a Tridiagonal Matrix, *Computing*, 35, 257-268.

Datta, B.N, and Datta, K. 1976. An Algorithm for Computing Powers of a Hessenberg Matrix and its Applications, *Linear Algebra and its Appications*, 14, 273 - 284.

Gentle, J.E, 2007. Matrix Algebra, Springer, New York.

Munir, R. 2012. Matematika Diskrit. Edisi revisi kelima. Bandung.

Pahade, J., and Jha, M. 2015. Trace of Positive Integer Power of Real 2 × 2 Matrices, *Advances in Linear Algebra & Matrix Theory*, 5, 150-155.

Pan, V. 1990. Estimating the Extremal Eigenvalues of a Symmetric Matrix, *Computers & Mathematics with Applications*, 20, 17 – 22.

Zarelua, A.V. 2008. On Congruences for the Trace of Powers of Some Matrices, *Proceedings of the Steklov Institute of Mathematics*, 263, 78-98.

ORIGINALITY REPORT

25%	22%	16%	5%
SIMILARITY INDEX	INTERNET SOURCES	PUBLICATIONS	STUDENT PAPERS

PRIMARY SOURCES

1	m.scirp.org Internet Source	6%
2	matematikapilihanku29.blogspot.com Internet Source	4%
3	media.neliti.com Internet Source	2%
4	Submitted to University of Sheffield Student Paper	2%
5	Pahade, Jagdish, and Manoj Jha. "Trace of Positive Integer Power of Real 2 × 2 Matrices", Advances in Linear Algebra & Matrix Theory, 2015. Publication	1%
6	dokumen.tips Internet Source	1%
7	ejournal.uin-suska.ac.id Internet Source	1%
8	www.fmric.or.jp Internet Source	1%

9	M. Hashem Pesaran, Takashi Yamagata. "Testing slope homogeneity in large panels", Journal of Econometrics, 2008 Publication	1 %
10	nasrudinanwar09.blogspot.com Internet Source	1 %
11	faculty.petra.ac.id Internet Source	1 %
12	Jacob, Niels, and Kristian P Evans. "Sequences and their Limits", A Course in Analysis, 2015. Publication	1 %
13	Submitted to Universitas Diponegoro Student Paper	1 %
14	link.springer.com Internet Source	<1 %
15	A. Sella. "Convergence analysis of turbo decoding of product codes", IEEE Transactions on Information Theory, 2001 Publication	<1 %
16	portalgaruda.ilkom.unsri.ac.id Internet Source	<1 %
17	www.inf.uth.gr Internet Source	<1 %
18	I.S. Hsu. "A comparison of VLSI architecture of	<1 %

finite field multipliers using dual, normal, or standard bases", IEEE Transactions on Computers, 6/1988
Publication

19 www.cefns.nau.edu
Internet Source
<1%

20 ZHOU, YIQIANG, and MICHAŁ ZIEMBOWSKI. "ON CLEAN LAURENT SERIES RINGS", Journal of the Australian Mathematical Society, 2013.
Publication
<1%

21 Pichon, C., and D. Aubert. "Dynamical flows through dark matter haloes: inner perturbative dynamics, secular evolution and applications", Monthly Notices of the Royal Astronomical Society, 2006.
Publication
<1%

22 science.unitn.it
Internet Source
<1%

23 jurnalalahkamstainpalopo.wordpress.com
Internet Source
<1%

Exclude quotes On
Exclude bibliography On
Exclude matches Off